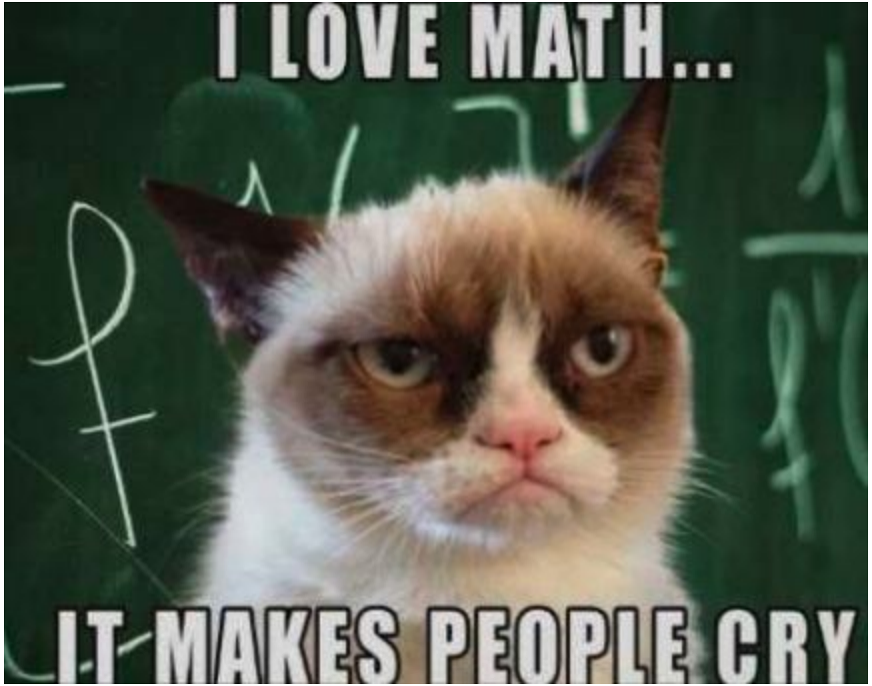
Математически функции


I LOVE MATH...
IT MAKES PEOPLE CRY

Полиноми

- Едночлен: **$2x^2$**
  - Коефициент (число), променлива, степен
- Полином: сума от едночлени
  - **$2x^4 + 3x2 - 0.5x + 2.72$**
- Степен на многочлена: най-високата степен на променлива (с коефициент ***≠ 0***)
- Операции:
  - Като при числата
  - Събиране и изваждане:
    - **$(2x^2 + 5x - 8) + (3x^4 - 2) = 3x^4 + 2x^2 + 5x - 10$**
  - Умножение и деление
    - **$(2x^2 + 5x - 8)(3x^4 - 2) = 6x^6 + 15x^5 - 24x^4 - 4x^2 - 10x + 16$**

Полиноми в Python

- **numpy** има модул за работа с полиноми
- Записване на полиноми
    - Като списъци (индекс ⇒ степен, стойност ⇒ коефициент)
    - По този начин реда е „наобратно”
- Библиотека:
  from numpy.polynomial import polynomial as poly

Събиране на полиноми в Python

$$3x^2 + 2x + 1$$
$$+ \quad x^2 + 8x + 2$$

$\longrightarrow$

```
c1 = (1, 2, 3)
c2 = (2, 8, 1)
```

```
sum = poly.polyadd(c1, c2)
```

$$4x^2 + 10x + 3$$

$\longrightarrow$

```
[ 3. 10.  4.]
```

Изваждане на полиноми в Python

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2x + 1 \\ -\quad x^2 + 8x + 2 \end{array}$$

→

```
c1 = (1, 2, 3)
c2 = (2, 8, 1)
```

```
diff = poly.polysub(c1, c2)
```

$$2x^2 - 6x - 1$$

→

```
[-1. -6.  2.]
```

Умножение на полиноми в Python

$$
\begin{array}{r}
3x^2 + 2x + 1 \\
* \quad x^2 + 8x + 2
\end{array}
\longrightarrow
$$

```
c1 = (1, 2, 3)
c2 = (2, 8, 1)
```

Умножение на полиноми в Python

$$(3x^2 + 2x + 1)(x^2 + 8x + 2) =$$

$$= 3x^4 + 24x^3 + 6x^2 + 2x^3 + 16x^2 + 4x + x^2 + 8x + 2 =$$

$$= 3x^4 + 26x^3 + 23x^2 + 12x + 2$$

```
multiply = poly.polymul(c1, c2)
```

```
[ 2. 12. 23. 26.  3.]
```

Деление на полиноми в Python

$$\frac{3x^2 + 5x + 2}{2x + 1} = 1.5x + 1.75, remainder 0.25$$

```
c1 = (2, 5, 3)
c2 = (1, 2)
```

```
divide = poly.polydiv(c1, c2)
```

↓

```
(array([1.75, 1.5 ]), array([0.25]))
```

Функционална зависимост

- Съпоставяне между
  - Множество от аргументи X (дефиниционна област) - **input values**
  - Множество от стойности за всеки аргумент - **output value**
- Означение:
  $y = f(x)$
- x - аргумент на функцията, независима променлива
- y - функция на x

Защо математически функции?

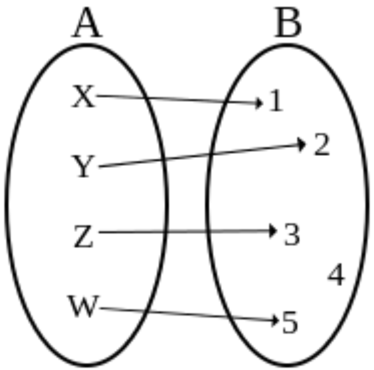
- Математическите функции се използват за математическо описание и моделиране на всякакви неща
- Използват се сериозно и в програмирането
- Функциите от програмирането != математически функции
- С математически функции може да се опише бързодействието на програма
- Математическите функции имат важно значение за изкуствения интелект и машинното самообучение.

Видове задаване на функции

- Аналитично (чрез формула)
- Таблично (чрез таблица от аргументи и стойности)
- Графично (чрез графиката на функцията)
- Описателно (чрез текстово описание на свойството на функцията)
- Многоформулно (разклонено, условно) зададена функция

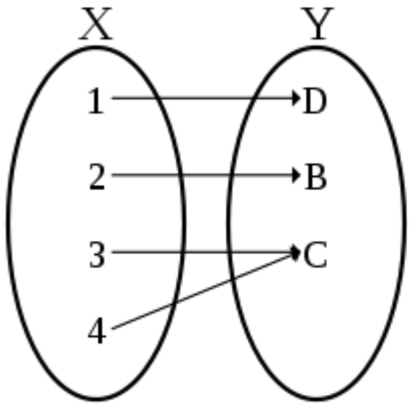
Инективност на функция

- Една функция е инективна, ако $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- С прости думи: различни стойности на аргумента x, съответстват на различни стойности на y
- Съпоставяне от тип „един-към-един”



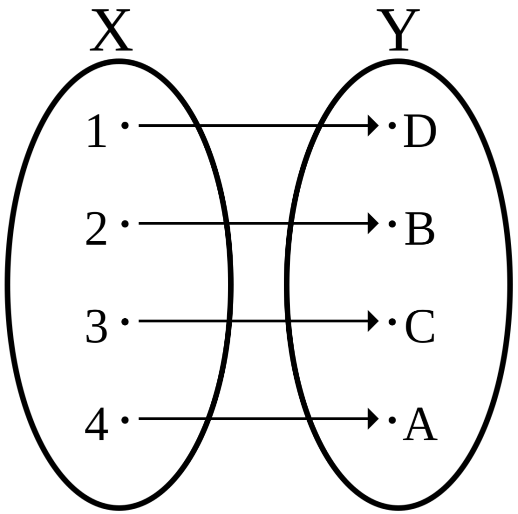
Сюрективност на функция

- Една функция е сюрективна, ако $\forall y \in Y : \exists x \in X$
- С прости думи: всяка възможна стойност на Y се получава за поне (може и повече) един аргумент на X
- Съпоставяне от тип „много-към-един”



Биективност на функция

- Функция, която е едновременно и инективна и сюрективна
- За всяка стойност на x съответства точно една стойност на y



Инективност, Сюрективност и Биективност

https://www.mathsisfun.com/sets/injective-surjective-bijective.html

Обратна функция

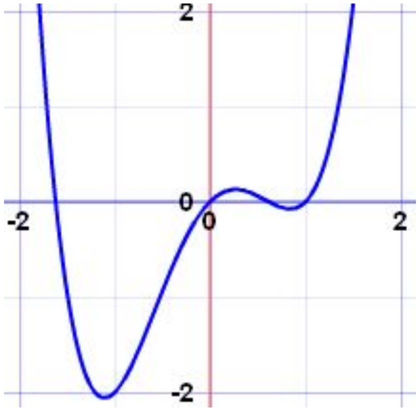
- Нека имаме биективна функция f(x)
- Нейната обратна функция $f^{-1}(x)$ за аргумент има множеството от стойности Y на f(x), а за стойности множеството от аргументи x на f(x)
- Пример:

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f^{-1}(x) = \frac{y-3}{2}$$

Непрекъсната функция

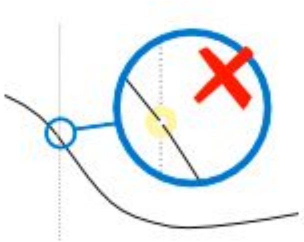
- Една функция наричаме непрекъсната, когато нейната графика е крива без „прекъсвания”
- Непрекъснатостта на функцията в математиката се разглежда за дадена нейна точка.



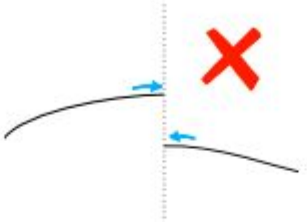
Прекъсната функция

- Обратното на **не**прекъсната функция
- В графиката на функцията се наблюдават прекъсвания:
  - „дупка” - интервал между две точки от графиката, в което функцията не съществува
  - „скок”
  - Вертикална асимптота

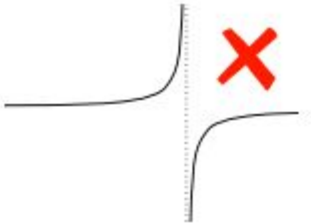
Примери: Прекъсната функция



ДУПКА



СКОК



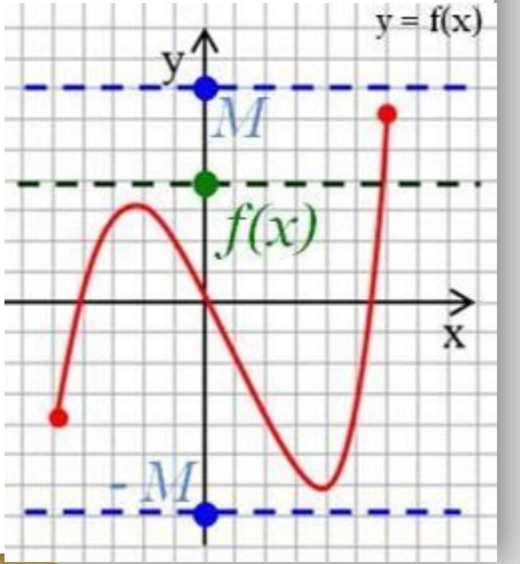
ВЕРТИКАЛНА АСИМПТОТА

Ограниченост на функция

- Една функция е ограничена, ако всички нейни стойности са такива, че могат да попаднат между две числа **A** и **B**, т.е.

$$A \leq f(x) \leq B, \forall x \in (a, b)$$

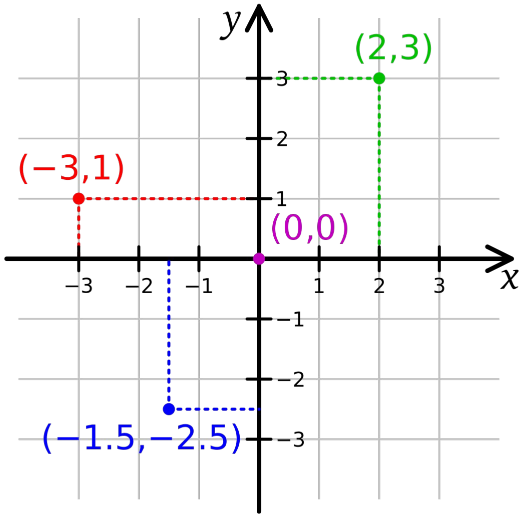
- Ограничителите представляват прави, успоредни на абсцисата
- Възможно е функцията да е ограничена:
    - Отгоре
    - Отдолу
    - И в двете направления



Правоъгълна координатна система

- Абсциса (0x) - хоризонтално
- Ордината (0y) - вертикално

- Всяка точка има координати:
  - (x, y)
  - X - координат по хоризонтала
  - Y - координат по вертикала



Изобразяване на графика на функция

- Всяка точка от графиката е съставена от два координата (x, y):
  - X - аргумента на функцията
  - Y - стойност на функцията за аргумента X
- За да изобразим успешно графиката се нуждаем от информация за поне две нейни точки:
  - Колкото повече точки знаем, толкова по-точна графика ще получим
- Как да изобразим графика с Python?
  - Генерираме стойности за X, такива че да принадлежат на дефиниционното множество
  - Изчисляваме техните стойности за Y, спрямо функцията
  - Нанасяме всички получени точки на графика

Графики на функции с matplotlib

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def plot_function(f, x_min = -10, x_max = 10, n_values = 2000):
  x = np.linspace(x_min, x_max, n_values)
  y = f(x)
  plt.plot(x, y)
  plt.show()

plot_function(lambda x: np.sin(x))
```

Благодаря за вниманието!

Автор: Петър Р. Петров, учител по програмиране, ПГЕЕ „Константин Фотинов”, гр. Бургас