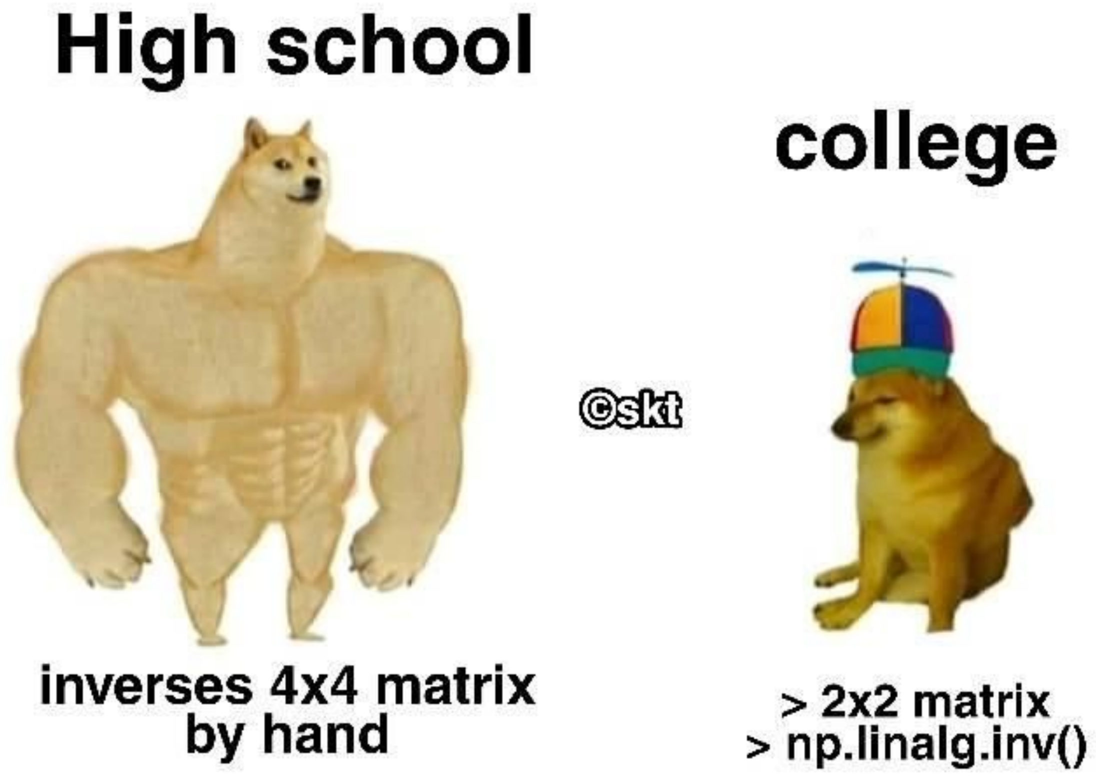
Линейна алгебра за програмисти… отново


High school
college
©skt
inverses 4x4 matrix
by hand
> 2x2 matrix
> np.linalg.inv()

Детерминанта

- Число, което съответства на дадена квадратна матрица
- Съпоставя матрицата към число
- Полученото число разкрива определени свойства, свързани с матрицата.
- Означение:
  - $\det A$ или Δ

Как да изчислим детерминантата?

- Изчислението на детерминантата зависи от нейния размер
- При размер 1x1, детерминантата съвпада с единствения елемент на матрицата:
  $\Delta = |a11| = a11$
- При размер 2x2:
  - Правилото е произведението от елементите на единия диагонал - произведението от елементите на

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$$

Как да изчислим детерминантата?

- При размер 3x3:
  - Правило на Сарус
  - Правило на триъгълника
- При по-голям размер: чрез използване на поддетерминанти

Правило на Сарус

- $$\Delta = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Правило на триъгълника

- Произведенията от триъгълниците с основи успоредни на главния диагонал събираме, а произвденията от триъгълници с онови успоредни на вторичния диагонал - изваждаме.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Пресмятане на детерминанта при произволен размер

- Поддетерминанта по отношение на даден елемент a_{ij} = детерминанта, в която реда i и стълба j са премахнати
- За да пресметнем голяма детерминанта избираме нейн ред или стълб и формираме поддетерминанти за всеки елемент от реда/стълба
- Life hack: Изберете реда/стълба с възможно най-много нули

Пресмятане на детерминанта при произволен размер

- Пример:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -0\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(2\cdot1\cdot3 + 1\cdot3\cdot4 + 1\cdot2\cdot2 - 1\cdot1\cdot4 - 2\cdot3\cdot2 - 1\cdot2\cdot3) = 2\cdot(6 + 12 + 4 - 4 - 12 - 6) = 2\cdot0 = 0$$

Елементарни преобразувания на матрици

- Елементарни преобразувания = преобразувания, които резултират в еквивалентна матрица
- Възможни преобразувания:
    - Промяна на местата на два реда в матрицата
    - Умножение с число различно от 0 на ред от матрицата
    - Прибавяне на един ред към друг, умножен по число, различно от 0

Обратна матрица

- Обратна матрица A^{-1} — матрица, чието произведение по първоначалната матрица A е равно на единичната матрица E:
- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Как се изчислява обратна матрица?

- Чрез помощна матрица:
  - Намираме детерминантата на оригиналната матрица
  - За всеки един елемент изчисляваме стойностите на поддетерминантата определена от него
  - Стойностите събираме в нова матрица $\tilde{A}$
  -

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^{T}$$

Пример: Обратна матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2\cdot2\cdot1 + 4\cdot1\cdot2 + 1\cdot0\cdot1 - 1\cdot2\cdot2 - 2\cdot1\cdot1 - 4\cdot0\cdot1 = 4 + 8 + 0 - 4 - 2 - 0 = 6$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot1 - 1\cdot1 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0\cdot1 - 1\cdot2) = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot1 - 2\cdot2 = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4\cdot1 - 1\cdot1) = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot1 - 1\cdot2 = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2\cdot1 - 4\cdot2) = 6$$

Пример: Обратна матрица

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot 1 - 1\cdot 2 = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2\cdot 1 - 1\cdot 0) = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 4\cdot 0 = 4$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

А сега на Python

- Намиране на детерминанта: np.linalg.det(a), където a е np.array, който представя матрицата
- Намиране на обратна матрица: np.linalg.inv(a)

Благодаря за вниманието!

Автор: Петър Р. Петров, учител по програмиране, ПГЕЕ „Константин Фотинов”, гр. Бургас