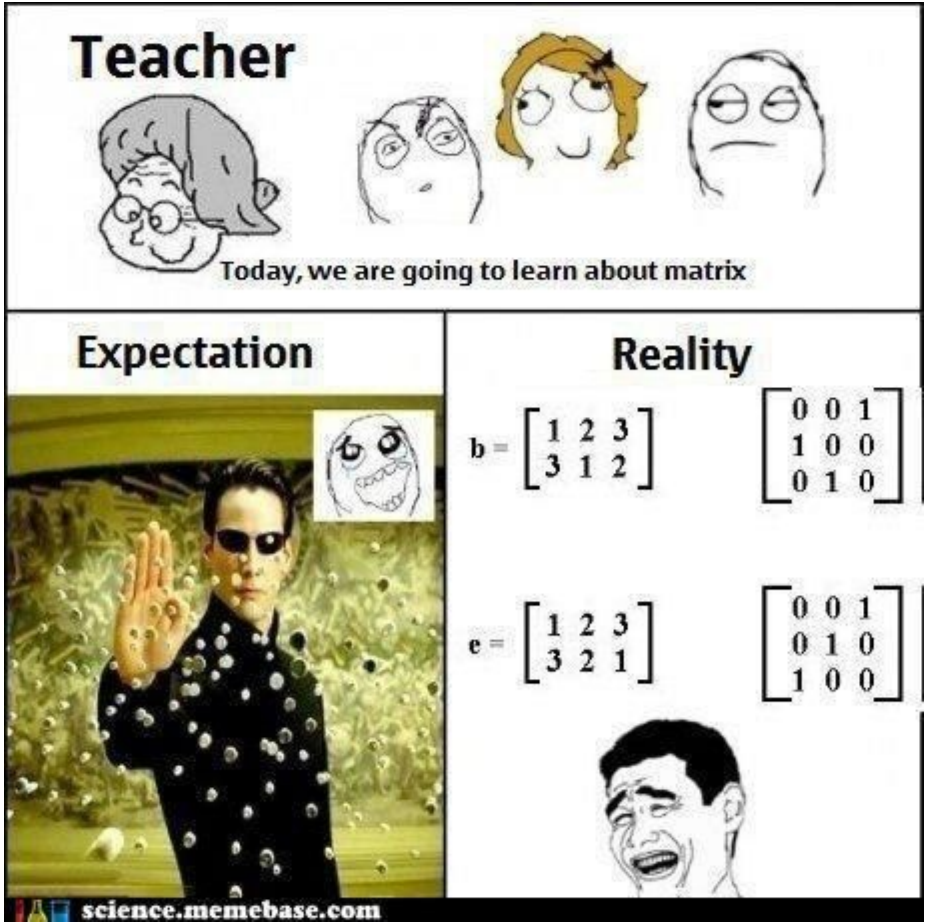
Линейна алгебра за програмисти


Teacher
Today, we are going to learn about matrix
Expectation
Reality
b = [1 2 3; 3 1 2]
0 0 1
1 0 0
0 1 0
e = [1 2 3; 3 2 1]
0 0 1
0 1 0
1 0 0
science.memebase.com

Матрица

- Матрица от тип m x n = таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- m реда
- n колони
- a_{ij} - елемент на матрицата, където i = 1...m, j = 1 … n

Как представяме матрица в кода?

- Двумерен масив
- Списък от списъци

Ползи от матриците в програмирането

- Представяне и обработка на данни
- Ел. таблици
- Изображения
- Приложения в различни алгоритми
- Изкуствен интелект и Machine Learning
- Игри
- Други

Още малко термини...

- Квадратна матрица
    - Еднакъв брой редове и колони
- Триъгълна матрица
    - Матрица, която има само нули под/над главния си диагонал
- Диагонална матрица
    - Матрица, която има нули навсякъде освен по диагонала

Квадратна матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Триъгълна матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Долнотриъгълна матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Горнотриъгълна матрица

Главен диагонал - ред = колона

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Вторичен диагонал - колона = n - i + 1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Диагонална матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица ред

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Матрица стълб

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Операции с матрици

- Събиране на матрици от един и същ тип
- Умножение на матрица с число
- Транспониране на матрица
- Умножение на матрици

Събиране на матрици

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрици в Python

- Реализират се със списък от списъци
- Можем да използваме и np.array

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 12 \\ 5 & -8 & 9 & 0 \\ -6 & 7 & 11 & 19 \end{pmatrix}$$

```
A = [[1, 4, 5, 12],
  [-5, 8, 9, 0],
  [-6, 7, 11, 19]]
```

```
A = np.array([[1, 4, 5, 12],
  [-5, 8, 9, 0],
  [-6, 7, 11, 19]])
```

Събиране на матрици (Python)

```python
X = [[12,7,3],
    [4 ,5,6],
    [7 ,8,9]]

Y = [[5,8,1],
    [6,7,3],
    [4,5,9]]

result = [[0,0,0],
         [0,0,0],
         [0,0,0]]

# iterate through rows
for i in range(len(X)):
   # iterate through columns
   for j in range(len(X[0])):
       result[i][j] = X[i][j] + Y[i][j]

for r in result:
    print(r)
```

Може ли малко по-кратко?

Събиране на матрици (Numpy)

```
import numpy as np

A = np.array([[2, 4], [5, -6]])
B = np.array([[9, -3], [3, 6]])
C = A + B       # извършва събиране на съответните елементи
  print(C)
```

Умножение на матрица с число

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Умножение на число с матрица в Python

```
a = 7

B = [[1,2],

    [3,4]]

C = np.dot(a,B)

print(C)
```

$$7 * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7*1 & 7*2 \\ 7*3 & 7*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$$

Транспониране на матрица

- В транспонираната матрица редовете се превръщат в стълбове (колони)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Транспониране на матрица в Python

- Numpy е твърде удобен за транспониране на матрици...

```
A = np.array([[1, 1], [2, 1], [3, -3]])
print(A.transpose()) # [[ 1, 2, 3], [ 1, 1, -3]]
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Умножение на две матрици

- Две матрици могат да се умножат ако броят на колоните в едната е равен на броя на редовете в другата
- Резултата се получава като всеки ред на едната матрица се умножи по всеки стълб на другата.
- Умножението не е комутативна операция, т.е. A.B и B.A са две различни неща, дори често B.A е невъзможно да се осъществи!

Умножение на две матрици

Multiplication of Matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{bmatrix}$$

Умножение на две матрици в Python

```
import numpy as np

A = np.array([[3, 6, 7], [5, -3, 0]])

B = np.array([[1, 1], [2, 1], [3, -3]])

C = A.dot(B)

  print(C)
```

3*1 + 6 * 1 + 7*(-3)

3*1 + 6* 2 + 7 * 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} AB = \begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5 * 1 + (-3) * 2 + 0 * 3

5 * 1 + (-3) * 1 + 0 * (-3)

Единична матрица

- Единична матрица (identity matrix)
- Квадратна матрица с размер n x n:
  - По главния диагонал имаме 1
  - Навсякъде другаде 0
- E A = A E = A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Четиво

https://machinelearningmastery.com/matrix-operations-for-machine-learning/

https://www.programiz.com/python-programming/matrix

https://towardsdatascience.com/a-complete-beginners-guide-to-matrix-multiplication-for-data-science-with-python-numpy-9274ecfc1dc6

Благодаря за вниманието!

Автор: Петър Р. Петров, учител по програмиране, ПГЕЕ „Константин Фотинов”, гр. Бургас