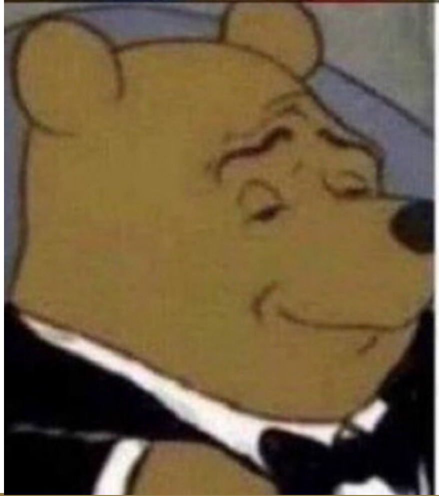
Системи линейни уравнения

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$



$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Система линейни уравнения (СЛУ)

- Съвкупност от **m** на брой уравнения с **n** неизвестни x_1, x_2, .

$$
\left|\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{array}\right.
$$

- a_{ij} - коефициенти на системата, b_i - свободни членове
- „линейна" - всички неизвестни са на първа степен, т.е. Нямаме x_1^2, x_1x_2, x_1^3 и прочие подобни степенувания.

Решение на СЛУ

- Всяка наредена n-торка $(c_1, c_2, \dots c_n)$, която при заместване на неизвестните с числа дава коректни равенства е решение
- Системите могат да бъдат:
  - Определени - имат 1 решение
  - Неопределени - имат безброй много решения
  - Несъвместими - нямат решение

Значение на матрици за СЛУ

- На всяка СЛУ може да се съпостави **основна матрица**
- На всяка СЛУ може да се съпостави **разширена матрица**
- Основна матрица - състои се от коефициентите на системата
- Разширена матрица - основна матрица с добавен стълб, съдържащ свободните членове

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Основна матрица

Разширена матрица

Метод на Гаус за решение на СЛУ

- Изключително лесен метод за решение - нужни са знания за 5 клас - събиране и умножение
- Мощен метод за решение на СЛУ
- Изискват се преобразувания върху разширената матрица

Елементарни преобразувания

- Размяна на местата на два реда:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

Елементарни преобразувания

- Ако в матрицата имаме два или повече пропорционални (или еднакви) реда - изтриваме ги и оставяме само един от тях:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Разделете реда на 2, за да видите, че е пропорционален на горните два

Елементарни преобразувания

- Ако в матрицата имаме ред само с нули - **премахваме** го.
- Ред в матрицата може да се умножи (раздели) на произволно число, различно от 0

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0{,}5 & 0 & 2{,}5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

На кое число сме разделили 1 ред?

На кое число сме умножили 2 ред?

Елементарни преобразувания

- Умножение на ред с число и прибавянето му към друг ред

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Умножаваме по -2: (-2 2 | 10)

-2 + 2 = ?

2 + 1 = ?

10 + (-7) = ?

Цел на елементарните преобразувания

- Елементарните преобразувания не променят решенията на системата
- Целта на елементарните преобразувания е привеждането на матрицата в триъгълен вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Триъгълен вид - имаме
нули под гл. диагонал

Пример

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

- Решение с Python: https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.solve.html

Благодаря за вниманието!

Автор: Петър Р. Петров, учител по програмиране, ПГЕЕ „Константин Фотинов”, гр. Бургас