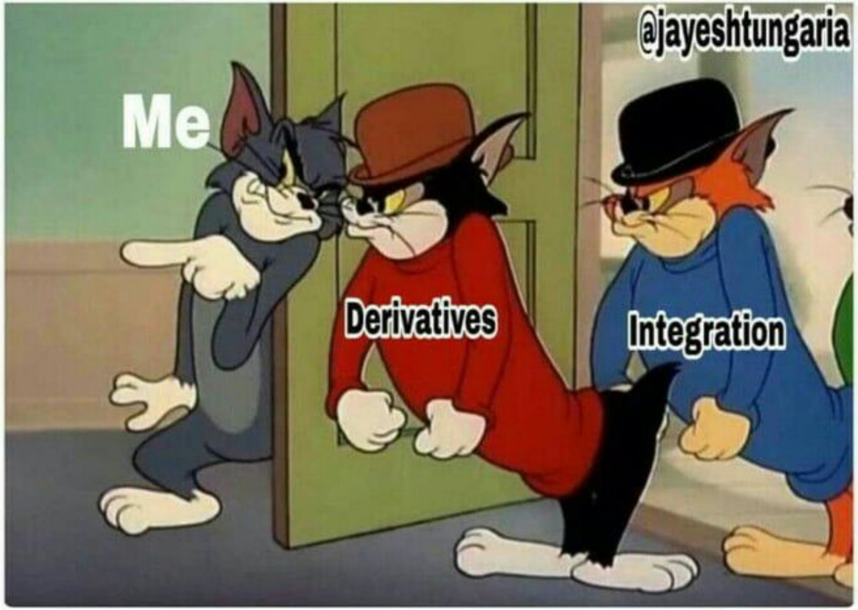
Вектори

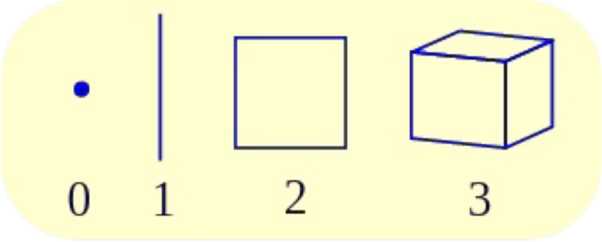
Jayesh
@Jayeshtungaria

When someone says they are good in maths



Измерение

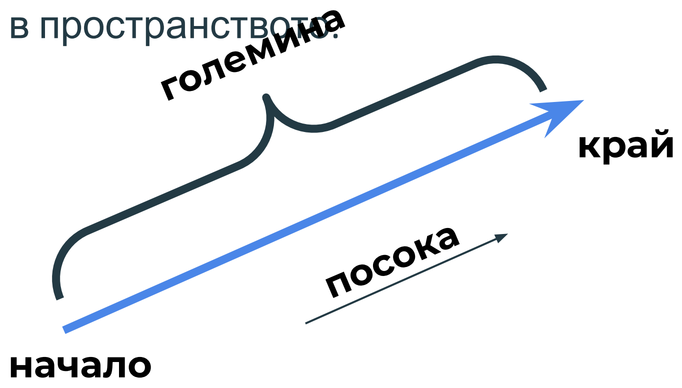
Измерение - измерване на дължина в една посока



Dimensions

Вектор

- Насочена отсечка, за която са зададени начало и край.
- Понятието има различни тълкувания - в математиката, физиката и програмирането.
    - Физика - отсечка с определена посока в пространството.
    - В програмирането - списък от обекти.
    - В математиката - смесица от двете:
        - Могат да бъдат отсечки с посока
        - Могат и да имат координати.
- Има огромно значение за:
    - Математика
    - Физика и химия
    - Компютърни науки
    - Други инжерни науки



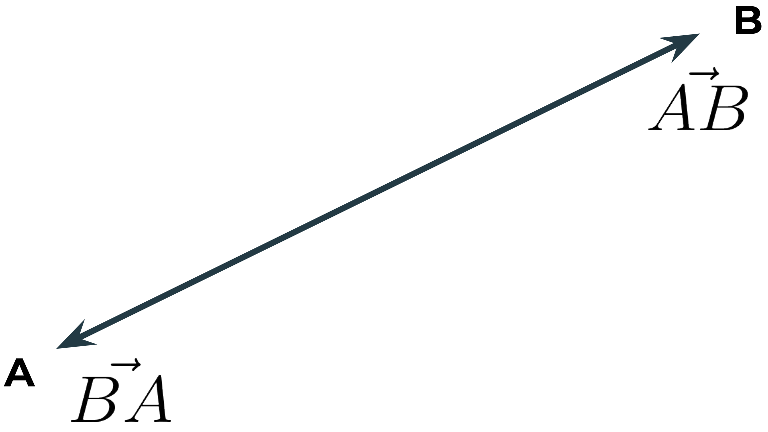
Посока на вектор

- Векторите си имат посока (направление)
- Каква е посоката на двата вектора?

$$\vec{AB} \quad \text{vs} \quad \vec{BA}$$

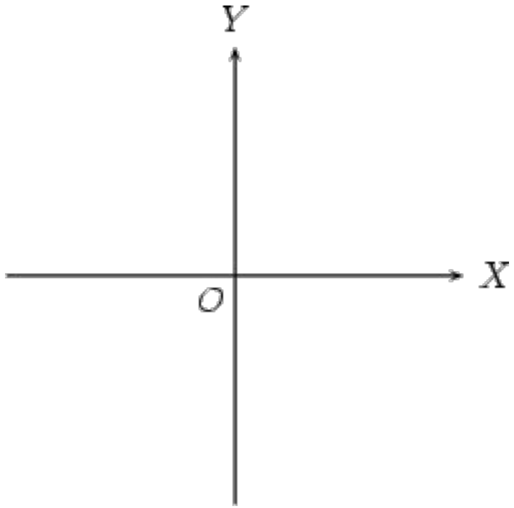
Посока на вектор

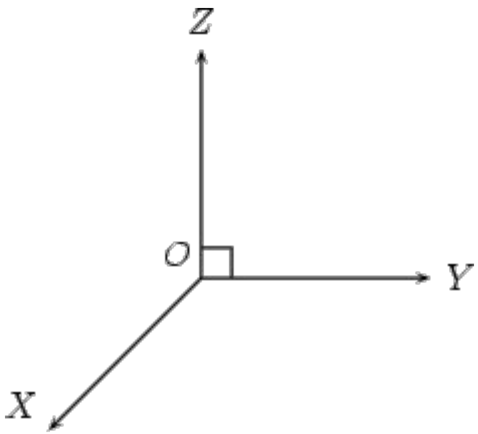
- Ако разменим началото и края на $\vec{AB}$ получаваме друг различен вектор $\vec{BA}$:
- Удобно е да си представяме векторите като движение на тела:
    - едно и също ли е да влезем в сграда и да излезем от нея?



Ос

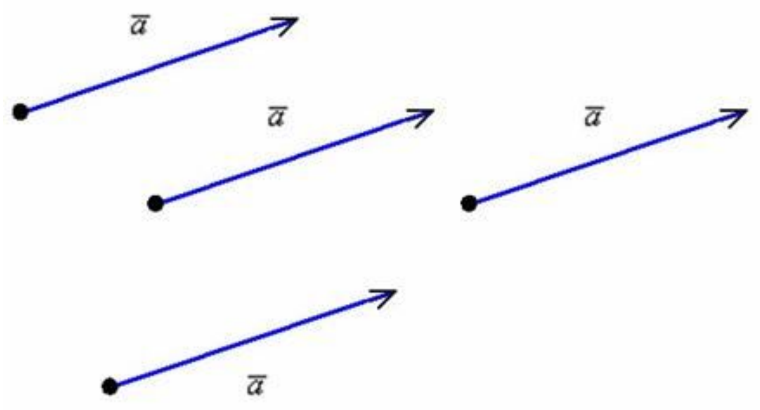
- **Ос** ще наричаме права, върху която сме фиксирали едната посока.
- Фиксираната посока се отбелязва с **+** или малка стрелкичка
- Например: **осите** Ox (абсциса), Oy (ордината), Oz (апликата)





Дължина на вектор

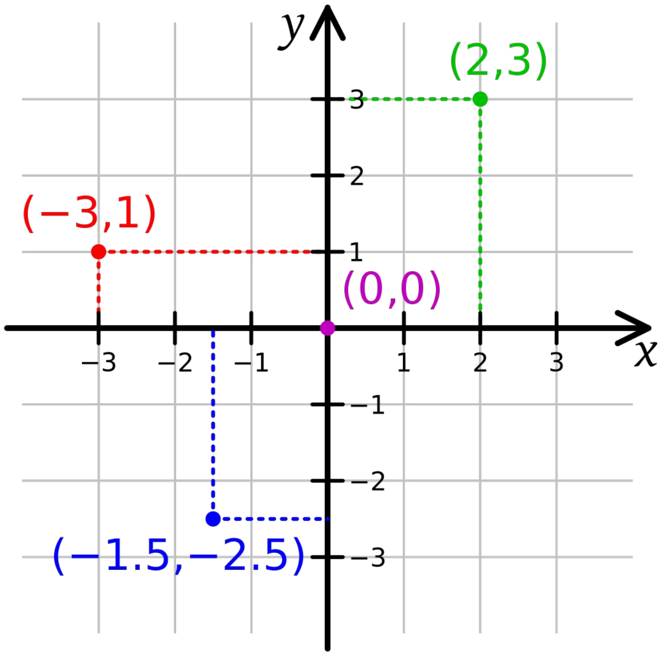
- Дължина (модул) на вектор $|\overline{AB}|$
  - Дължина на отсечката AB
- Алгебрична мярка на вектор $\overline{AB}$
  - Дължината на отсечката AB взета със знак „+” или „-”, според това дали насочената отсечка е по посоката на дадена ос или не
- Съществува нулев вектор - неговата дължина и мярка е 0: $\vec{0}$
- Свободен вектор
  - Множество от един вектор
    и всички равни на него вектори
  - Всеки вектор от това множество
    се нарича представител на свободния вектор



Декартова координатна система

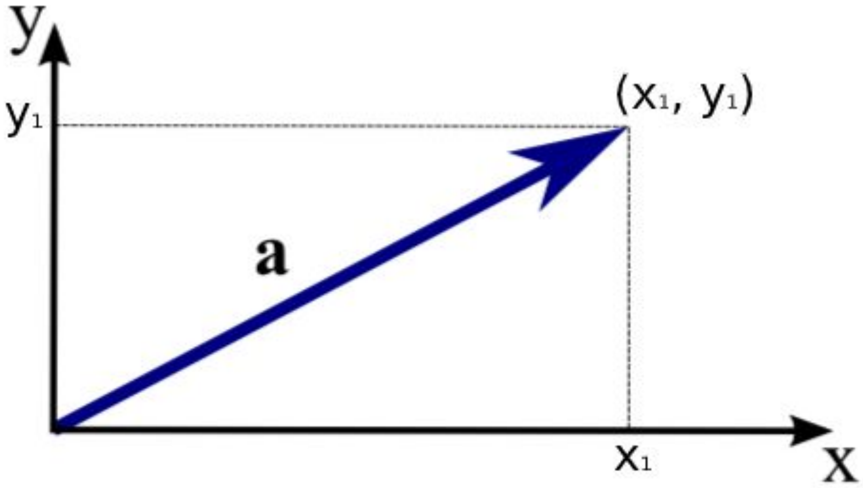
- **Абсциса** (0x) - хоризонтално
- **Ордината** (0y) - вертикално

- Всяка точка има координати:
  - (x, y)
  - X - координат по хоризонтала
  - Y - координат по вертикала



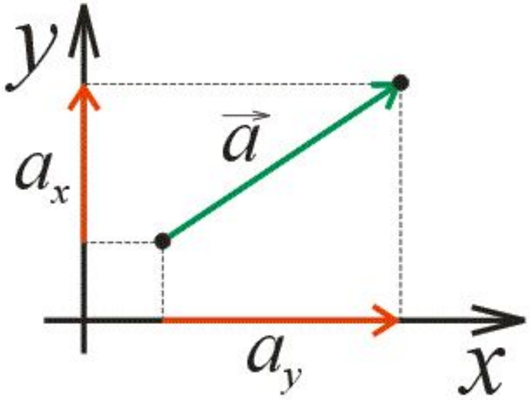
Координати на вектори

- Ако приемем, че началото на даден вектор се намира в точка (0, 0), то той може да се запише с координати (x_1, y_1).
- **Радиус-вектор** - векторът, който свързва произволна точка с началото на координатната система. Всяка точка в координатна система може да бъде разгледана и чрез радиус-вектора си.



Координати на вектори

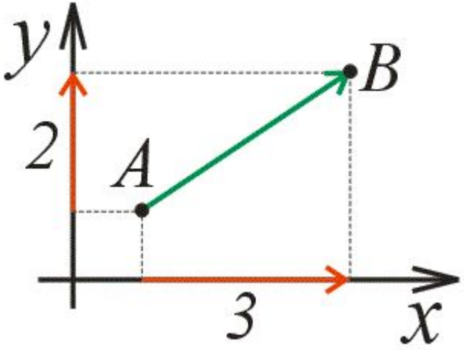
- Координатите на вектора показват и неговите **ортогонални проекции** върху координатните оси:
- Не винаги вектора е с начална точка (0, (
  тогава координатите се получават
  по следния начин:
  - Координати = край - начало
- Координатите на векторите могат да се разгледат като списъ $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$

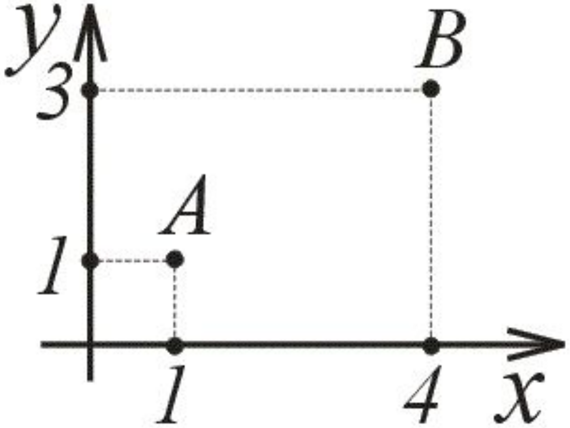


- Ако векторът е в по-високо измерение, т
  списък би имал повече елементи

Пример: намиране на координати на вектор

- Намерете координатите на вектора:
  - $AB_x = |4 - 1| = 3$
  - $AB_y = |3 - 1| = 2$
- Координатите на вектора са (3, 2):



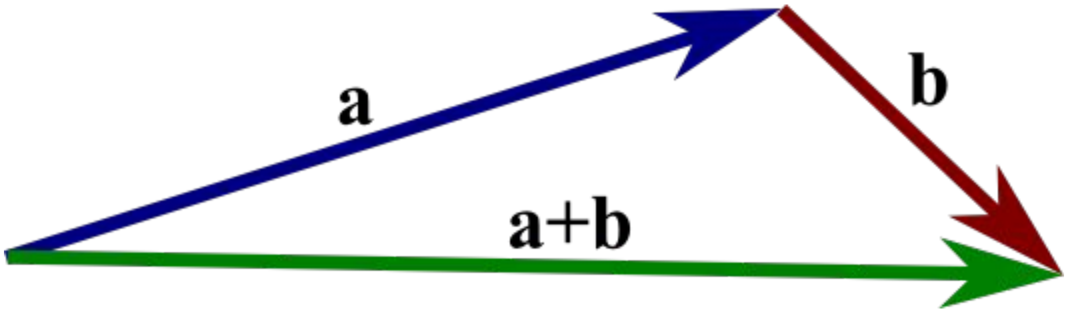


Действия с вектори

- Събиране
- Изваждане
- Скаларно умножение (умножение на вектор с число)
- Скаларно произведение на два вектора (dot product)
- Векторно произведение на два вектора (cross product)

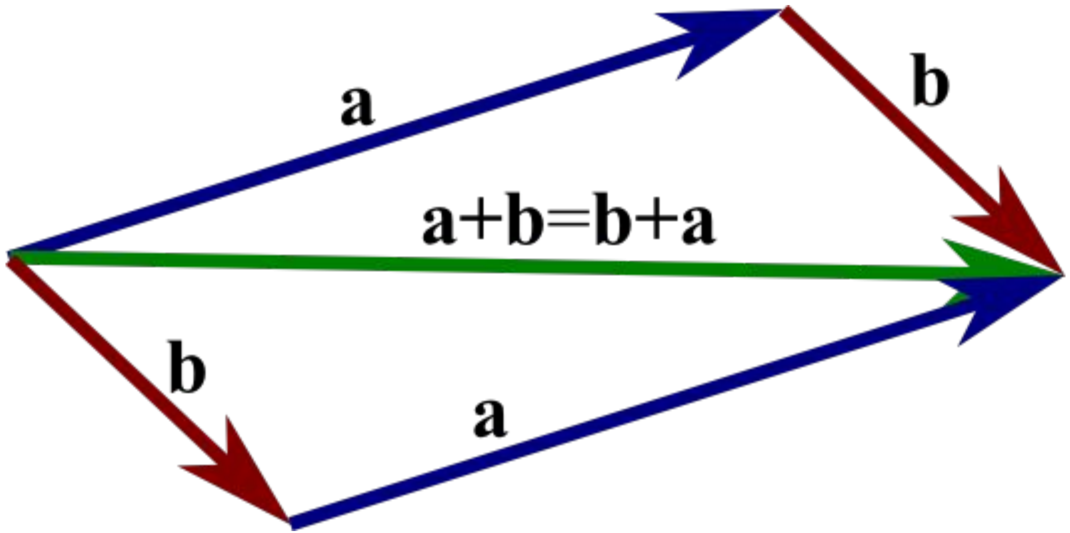
Събиране на вектори

- При събирането на вектори се получава нов вектор - с начало от единия вектор и край в края на другия вектор.
- Събирането може да се осъществи по правилото на триъгълника:



- Ако векторите са дадени с координатите си, то събирането се извършва почленно за всеки от координатите (x координати с x координати, y координати с y координати и т.н.)

Събирането е комутативно

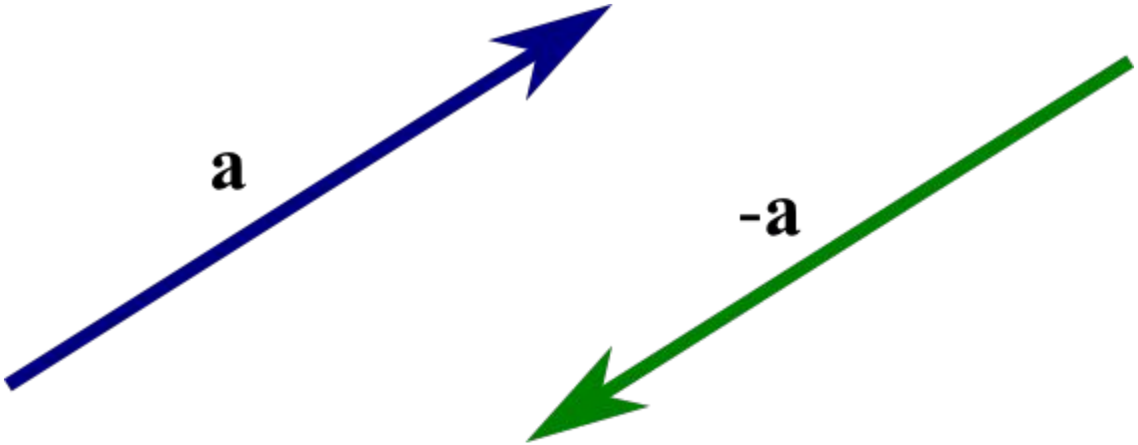


Други свойства на събирането на вектори:

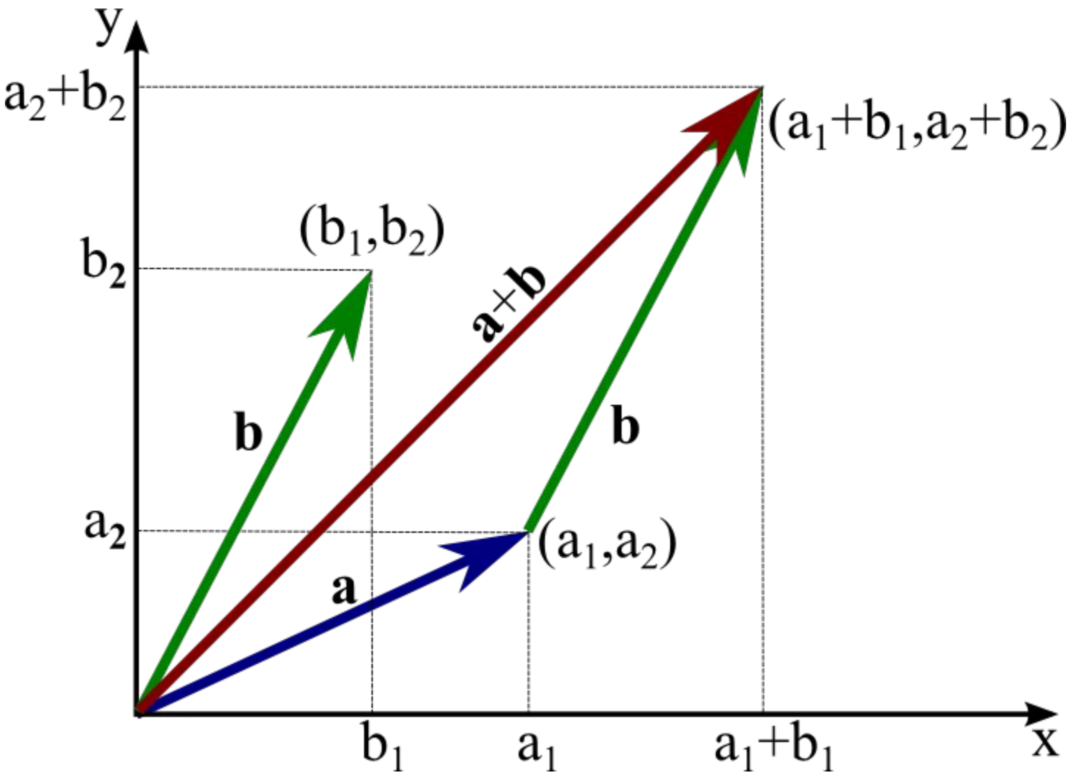
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
- $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

Обратни вектори

- Нека имаме вектор **-a**. Този вектор е със същата големина като **a**, но е обърнат в противоположната посока.



Координати на сбора на векторите



Скаларна величина vs Векторна величина

- Скалар - число
- Вектор - големина и посока

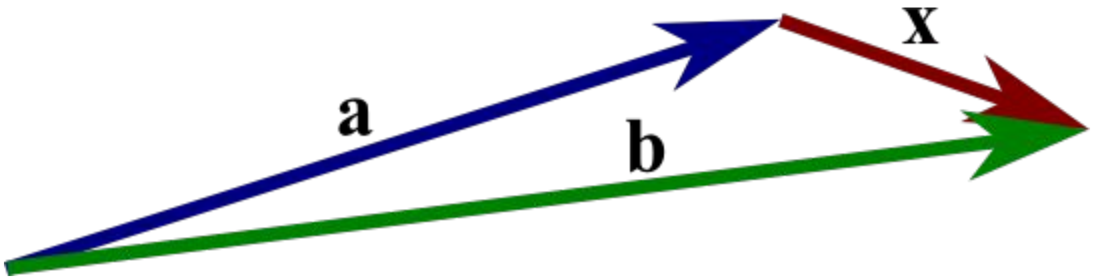
- Дължина
- Лице
- Обем
- Маса
- Плътност
- Налягане
- Температура
- Енергия

- Изместване
- Ускорение
- Момент
- Сила
- Тегло
- Триене
- Електрическо поле
- Магнитно поле
- Температурен градиент
- Импулс

Изваждане на вектори

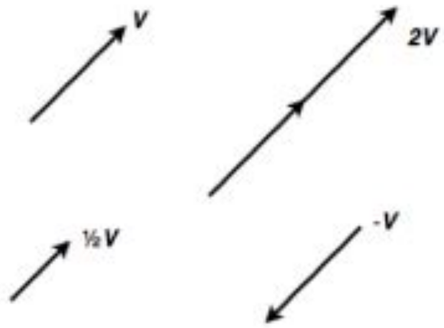
- Дефинираме изваждането на вектори като събиране с противоположния вектор:

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$$



Умножение на вектор с число

- При умножение на вектор с число се получава нов вектор:
  - Мащабира се дължината
  - Ако векторът се умножава по положително число, посоката се запазва
  - Ако векторът се умножава по отрицателно число, посоката става противоположна.
- При умножение на вектор представен с координати с число:
  - Всеки от координатите се умножава по числото

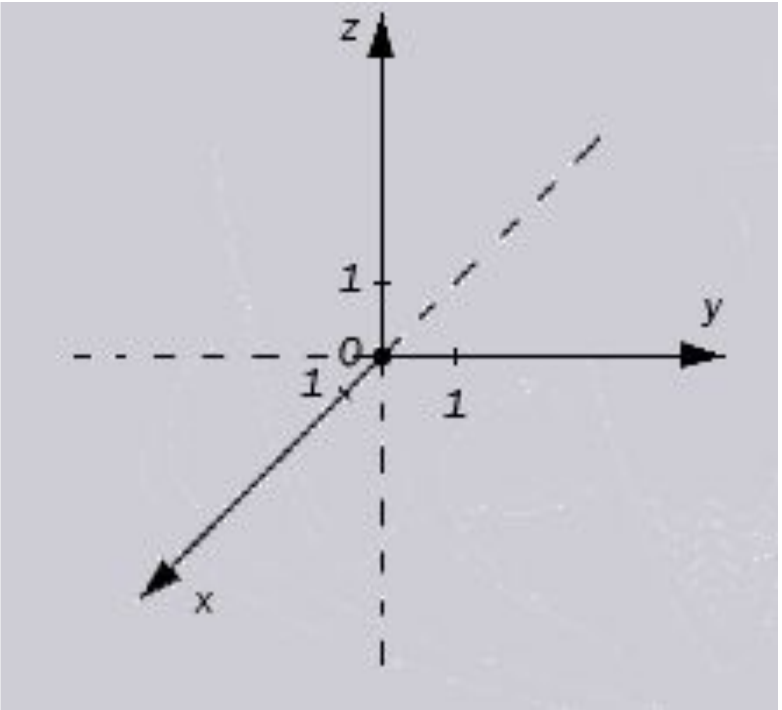


Тримерна правоъгълна координатна система

Координатна система образувана от три перпендикулярни координатни оси, т. е. КС с базис три взаимноперпендикулярни вектора. Състои се от:

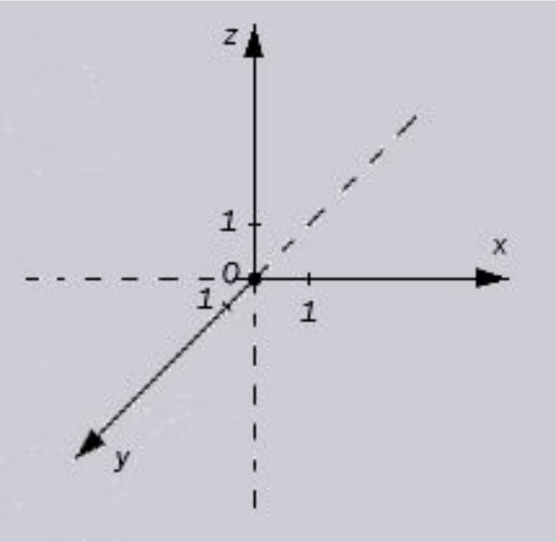
- ***0x*** *(абсциса)*
- ***0y*** *(ордината)*
- ***0z*** *(апликата)*

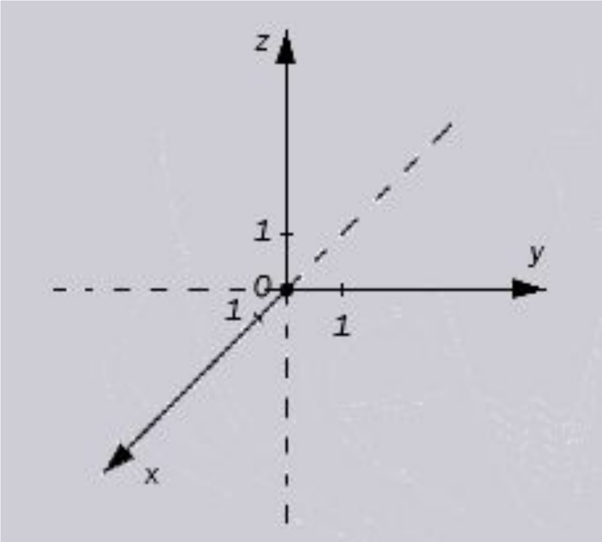
Отбелязва се като ***0xyz***



z
1
y
0
1
1
x

Ляво/дясно-ориентирана КС

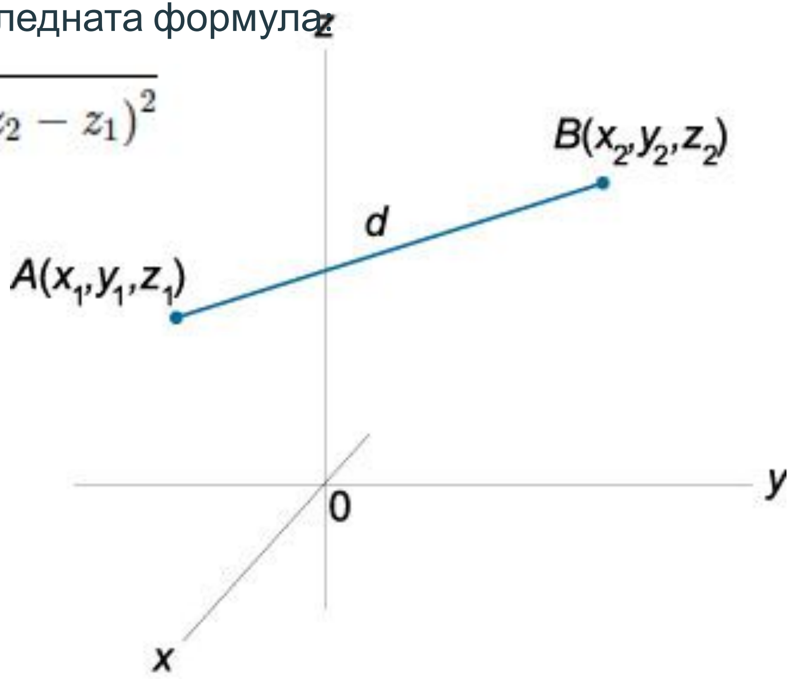




Разстояние между две точки

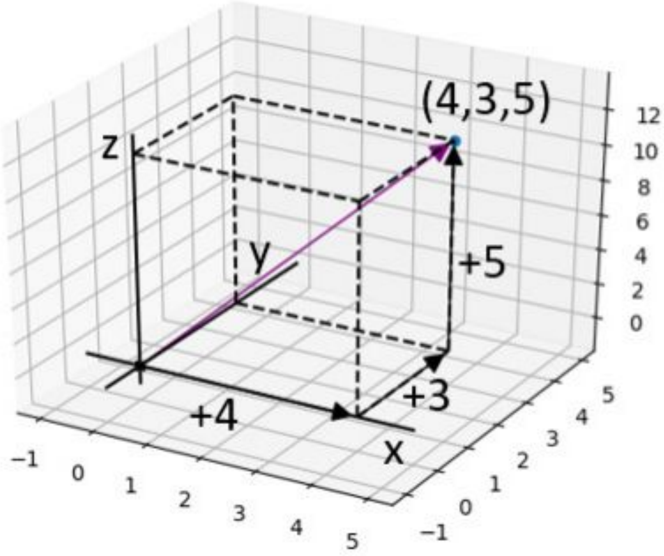
- Нека имаме точките $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$
- Разстоянието d между тях се намира по следната формула:

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



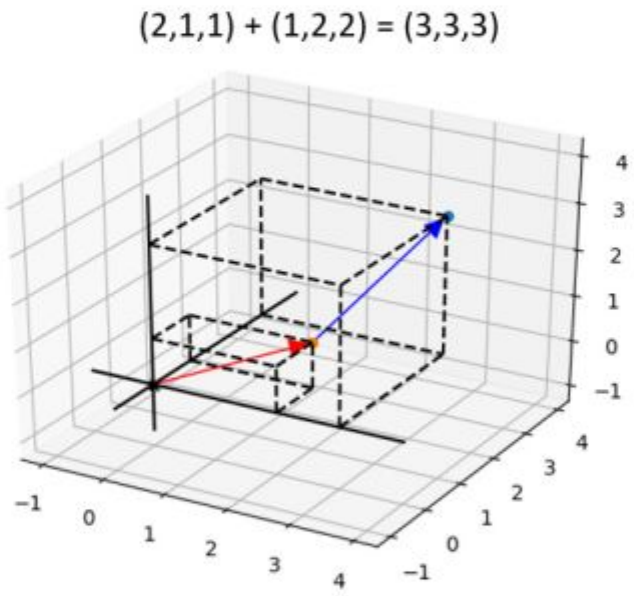
3D Вектори

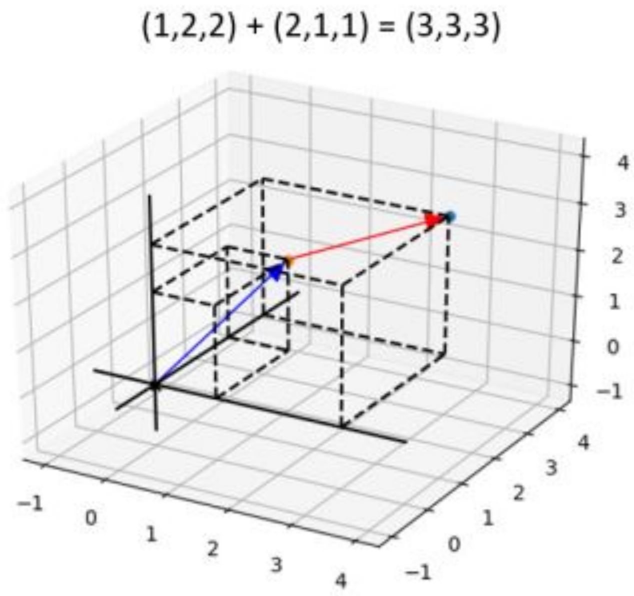
- Вектори, които „живеят” в тримерното пространство.
- Имат три координата
- Огромно значение за компютърната графика и компютърните игри



Събиране на вектори

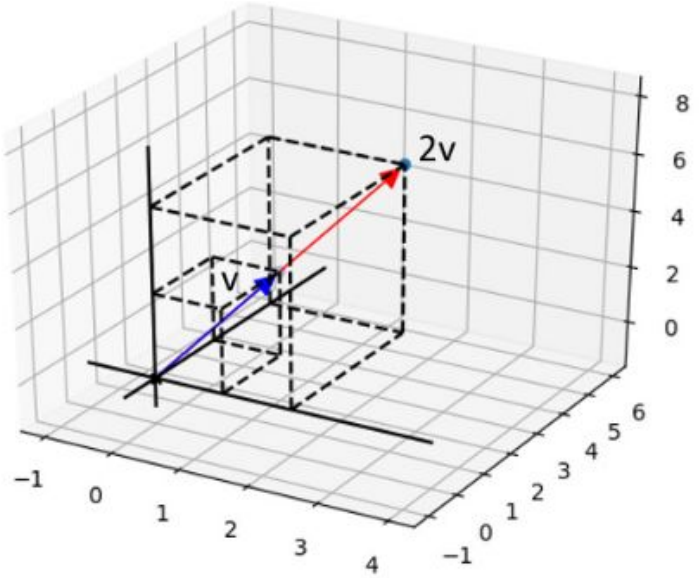
- Нека имаме вектори с координати (2, 1, 1) и (1, 2, 2)
- Сумирането в 3D на вектори отново става чрез събиране на съответните





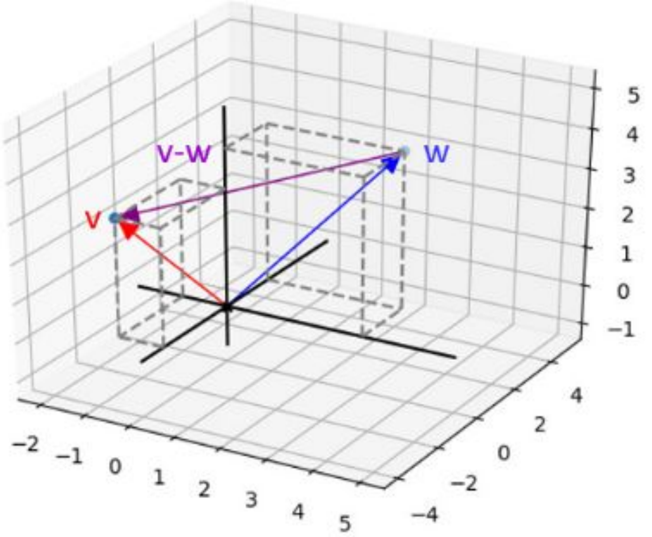
Скаларно умножение

- Нека имаме вектор (1, 2, 3)
- Същият вектор скаларно умножен по 2 е: (2, 4, 6)
- Резултатният вектор е със същата посока, но два пъти по-дълъг



Изваждане на вектори

- Подобно на 2D изваждането
- Разликата между двата вектора, представлява вектор, който може да се “постави” между тях
- Получава се чрез изваждане на съответните координати, пример:
    - v = (-1,-3,3)
    - w = (3,2,4)
    - v - w = (-1-3,-3-2,3-4) = (-4, -5, -1)



Скаларно произведение между вектори

- Отбелязва се с **u · v**
- Операция между два вектора с числен (скаларен) резултат
- Прилага се за вектори в 2D, 3D или произволно пространство
- Казва ни колко “подредени” са 2 вектора.
- Нарича се още “dot product” или “inner product”.
- Два вектора със сходна посока имат положително скаларно произведение
- Два вектора в противоположни посоки или почти противоположни посоки имат отрицателно скаларно произведение
- Два перпендикулярни вектори имат 0 за скаларно произведение

Скаларно произведение и ъгли

- Ако ъгълът между два вектора е < 90° => положително скаларно произведение
- Ако ъгълът между два вектора е > 90° => отрицателно скаларно произведение
- Ако ъгълът между два вектора е 90° => нулево скаларно произведение

Как да намерим скаларното произведение?

- По ъгъл между два вектора
  - скаларното произведение е равно на произведението между големите на двата вектора и ъгъла между тях:

$$\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right| . \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\alpha,$$

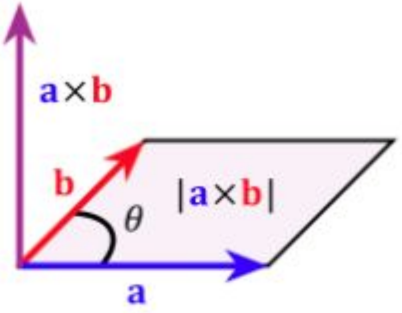
- По координати (примерът е за 3D вектори):

$$\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

- При произволен брой координати $\vec{a}.\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

Векторно произведение

- Отбелязва се с **u × v** (cross product)
- Операция между два вектора с векторен резултат
- Векторно произведение на два вектора е трети вектор, който е перпендикулярен и на двата вектора едновременно.
- Формула: $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\theta)\vec{n}$
  - $\vec{n}$ е вектор-нормала - той е перпендикулярен на двата вектора и има дължина 1
  - Големина: $|\vec{a}||\vec{b}| \sin(\theta)$ - това е лицето на успоредника, чиито страни са векторите **a** и **b**



Векторно произведение с координати

- Векторното поризведение с координати на векторите може да се запише по следния начин:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k$$

- Тук **i**, **j** и **k** са базисни вектори за тримерното пространство (тяхната дължина е 1)

Векторно произведение с координати

- Така получаваме координатите на резултатния вектор:

  $c_x = a_y b_z - a_z b_y$
  $c_y = a_z b_x - a_x b_z$
  $c_z = a_x b_y - a_y b_x$

Благодаря за вниманието!

Автор: Петър Р. Петров, учител по програмиране, ПГЕЕ „Константин Фотинов”, гр. Бургас